Теорема. Множество всех действительных чисел несчетно.

Начало доказательства: допустим, что множество действительных чисел отрезка [0,1] счетно. Тогда все эти числа можно занумеровать натуральными числами $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$. Покроем каждую точку a_i интервалом G_i длины 10^{-i}.

Дальше нужно решить задачи с 4 по 7:

Задача 4. Доказать, что при любом n объединение $G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_n$ не покрывает отрезка [0,1].

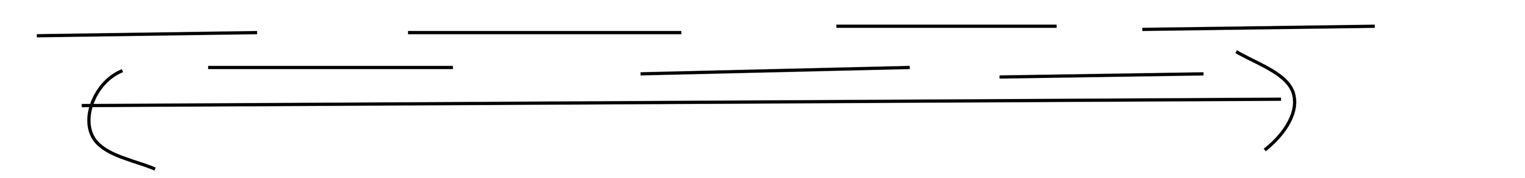
Выберем какую-нибудь точку, не покрытую этими интервалами, и обозначим ее через B_n.

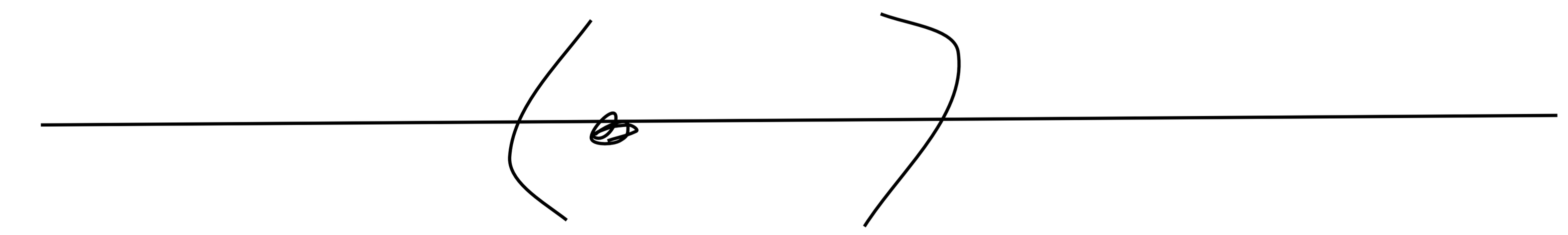
по Т о пр. точке мн-ва на отрезке

Задача 5. Доказать, что найдется точка, предельная для множества точек B_n (обозначим эту точку через C).

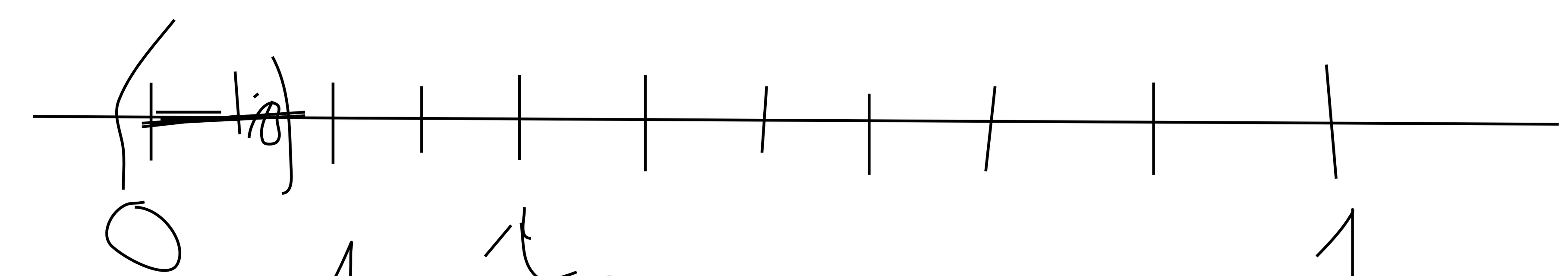
Задача 6. Найдите противоречие в том факте, что точка C покрыта некоторым интервалом G_k.

Задача 7. Это противоречие доказывает, что множество точек отрезка не может быть счетным. Выведите из этого, что и множество всех действительных чисел несчетно.



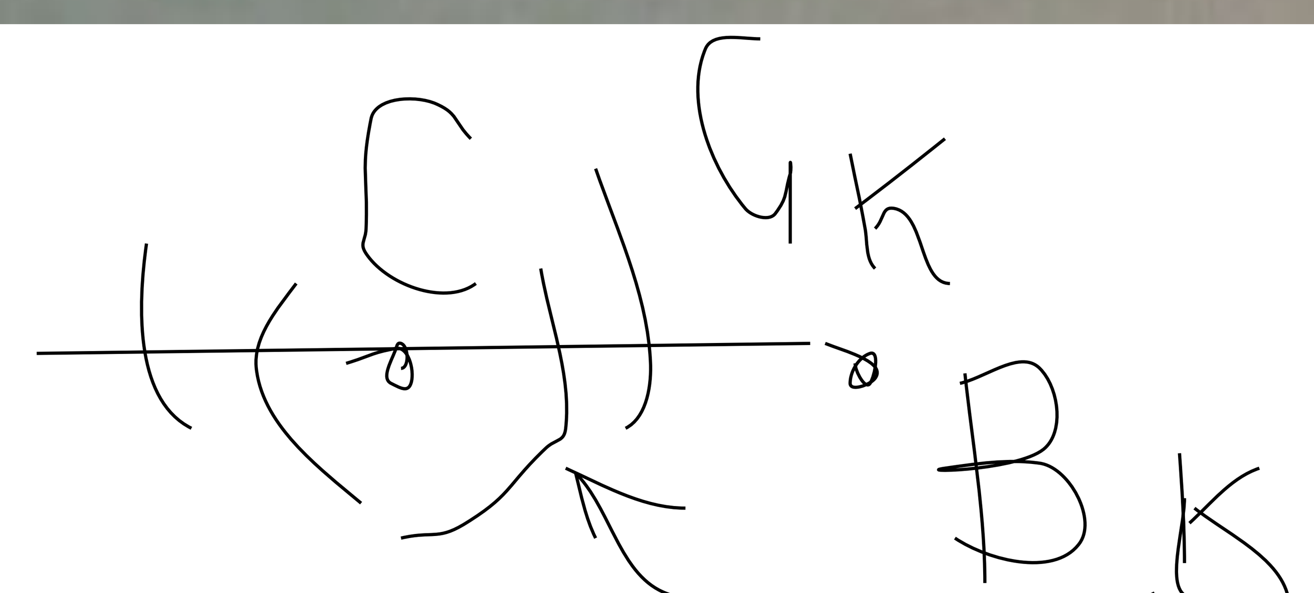


$$\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\dots+\frac{1}{10^n}<1$$



$$\frac{1-\frac{1}{10^n}}{9}<1$$

$$1-\frac{1}{10^n}<9$$



Не попадут С не будет предельной

Значит, нашлась такая точка, которая не попадет ни в один G_k, значит она не попадет в список пронумерованных точек, значит множестов несчетно

Здесь важно, что в задаче 4 объединение конечное. Если бы было бесконечное объединение, то это безусловно доказывало бы теорему. Я полагаю, что в задаче используется конечное объединение, потому что ещё не обоснована счётная аддитивность меры Лебега и мы можем говорить о мере только конечных объединений.